Lycée B. Monastir	**Devoir de synthèse N :1**	$3^{\text{ème}}$ M_2
P.P. : ALI ZOUHAIER	Durée : 120 minutes	*6/12/2006*

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{6-|x|}{3-x} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x^2-4x+20} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

C_f est la courbe représentative de f dans un R.O.N. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/**a**- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b- Déduire que C_f admet une asymptote Δ dont on précisera.

c- Etudier la position relative de C_f et Δ sur $\left]-\infty; 0\right[$.

d- Tracer une allure de C_f au voisinage proche de $-\infty$.

2/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\left[-7; 3\right]$.

3/**a**- Prouver que $\forall x \geqslant 2;\ f(x) - x = \dfrac{-4+\frac{20}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{20}{x^2}}+1}$

b- Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x + 2]$.

c- Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ' que l'on précisera.

d- Etudier la position relative de C_f et Δ' sur $\left[2; +\infty\right[$.

Exercice 2

Soient m un paramètre réel et $f_m : x \mapsto f_m(x) = \dfrac{(m-3)x^2+(m-2)x-5}{x^2+3x-4}$

1/ Déterminer le domaine de définition de f_m.

2/ Discuter suivant m la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$.

3/ Dans ce qui reste on prend $\boxed{m = 5}$. La fonction f_5 est-elle prolongeable par continuité en -4 ?

Exercice 3

Dans le plan orienté P dans le sens direct, on considère le triangle ABC tel que

$\widehat{\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)} \equiv -\dfrac{95\pi}{7}\ [2\pi]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right)} \equiv \dfrac{138\pi}{7}\ [2\pi]$.

1/ Donner les mesures principales de $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right)$.

2/ Calcculer $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right)$; déterminer la nature du triangle ABC.

3/ Posons I le milieu de $[BC]$. Soit E le point de P vérifiant :E $\in \Delta$ la médiatrice de $[BC]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{EB}; \overrightarrow{EI}\right)} \equiv \dfrac{3\pi}{28}\ [2\pi]$. Le cecle $\mathcal{C}$ de centre A et passant par B coupe $[IA)$ en N. Montrer que $E = N$.

Exercice 4

ABCD est un losange tel que $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{3}$ et posons $AB = a$ avec $a \in IR_+^*$.

Désignons par $I = A * C$ et $J = B * I$.

Soit $E = \left\{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + MB^2 = \dfrac{a^2}{2}\right\}$.

1/ Quelle est la nature du triangle ABC ?

2/ Parmi les points A, B, C et D lequel est dans E.

3/ Montrer que $\forall M \in P$ on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + MB^2 = MI^2 + MB^2 - IA^2$.

4/ Montrer alors que E est un cercle de centre J et dont on précisera le rayon en fonction de a.

Bon Travail

Une correction possible

Exercice 1

1/a- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6-|x|}{3-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6+x}{3-x}$ *car* pour x voisin de $-\infty$; $|x| = -x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{-x}$ **d'après un théo**.

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (-1)$ **après simplificatin**

$= -1.$

b- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow$ la droite $\Delta : y = -1$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$.

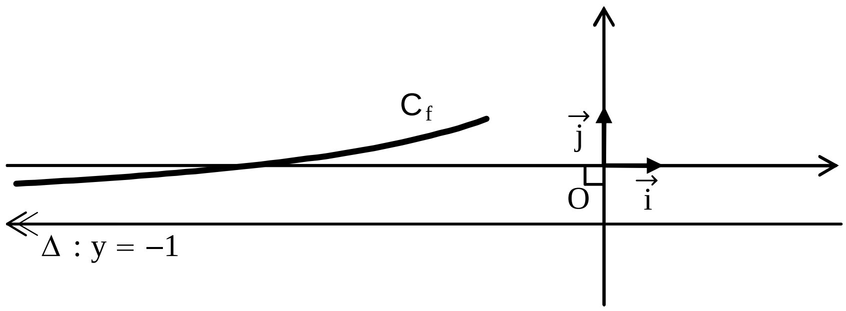
c- $\forall x \in \left]-\infty; 0\right[;\ f(x) - (-1) = \dfrac{6-|x|}{3-x} + 1$

$= \dfrac{6+x+3-x}{3-x}$ **car** $\forall x \in \left]-\infty; 0\right[;\ |x| = -x$

$= \dfrac{3}{3-x} > 0$

$\Rightarrow C_f$ est au dessus de Δ sur $\left]-\infty; 0\right[$.

d-



2/ • la fonction $(x \mapsto x)$ est continue sur IR

$\Rightarrow$ la fonction $(x \mapsto |x|)$ est continue sur IR

$\Rightarrow$ la fonction $(x \mapsto 6-|x|)$ est continue sur IR

et comme la fonction $(x \mapsto 3-x)$ est continue et ne s'annule pas sur $IR\backslash\{3\}$

alors la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{6-|x|}{3-x}\right)$ est continue sur $IR\backslash\{3\}$.

par suite f est continue $\left[-7; 2\right[$..

• $*\ f(2) = \sqrt{2^2 - 4\times 2 + 20} = 4$

$*\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{6-|x|}{3-x} = 4$ car la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{6-|x|}{3-x}\right)$ est continue en 2.

$*\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x^2-4x+20} = 4$ car $\lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-4x+20) = 16$

D'où f est continue en 2.

• la fonction $(x \mapsto x^2 - 4x + 20)$ est continue et positive sur $]2;+\infty[$

$\Rightarrow$ la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{x^2-4x+20}\right)$ est continue sur $]2;+\infty[$

$\Rightarrow$ f est continue sur]2,3].

Ainsi : f est continue sur $[-7;3]$

De plus $f(-7) = \dfrac{6-|-7|}{3+7} = \dfrac{-1}{10} < 0$ et $f(3) = \sqrt{3^2 - 4\times 3 + 20} = \sqrt{17} > 0$

Donc, le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-7;3]$.

3/a- $\forall x \geqslant 2;\ f(x) - x = \sqrt{x^2-4x+20} - x$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+20}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4x+20}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4x+20}+x\right)}$$

$$= \frac{x^2-4x+20-x^2}{\sqrt{x^2-4x+20}+x} = \frac{x(-4+\frac{20}{x})}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{20}{x^2}}+1\right)} = \frac{-4+\frac{20}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{20}{x^2}}+1}$$

b- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x+2] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-4+\frac{20}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{20}{x^2}}+1}+2\right]$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{20}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{20}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}$ alors

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4+\frac{20}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{20}{x^2}}+1}+2\right] = \frac{-4}{1+1}+2=0$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$

c- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0 \Rightarrow$ La droite $\Delta' : y = x-2$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

d- $\forall x \in [2;\ +\infty[;\ f(x)-(x-2) = \sqrt{x^2-4x+20}-(x-2)$

$$= \frac{x^2-4x+20-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+20}+(x-2)}$$

$$= \frac{x^2-4x+20-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-4x+20}+(x-2)}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{x^2-4x+20}+(x-2)} > 0$$

Donc C_f est au dessus de Δ' sur $[2;\ +\infty[$.

Exercice 2

1/ $f_m(x) = \frac{(m-3)x^2+(m-2)x-5}{x^2+3x-4}$ n'existe pas $\Leftrightarrow x^2+3x-4=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-4$

Conclusion $D_f = IR\backslash\{-4;\ 1\}$ est le domaine de définition de f_m.

2/ D'abord f_m est une fonction ratinnelle donc on a deux cas:

Premier cas: $m \neq 3$ alors $(m-3)\neq 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(m-3)x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}(m-3) = m-3.$

Deuxième cas: $m=3$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-5}{x^2+3x-4}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$

3/ On prend $\boxed{m=5}$;

$\lim\limits_{x\to-4^+} f_5(x) = \lim\limits_{x\to-4^+}\frac{2x^2+3x-5}{x^2+3x-4}.$

- $\lim\limits_{x\to-4^+}(2x^2+3x-5)=19.$

-

x	$-\infty$	-4		1	$+\infty$
$2x^2+3x-5$	+	0	−	0	+

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-4^+}(x^2+3x-4)=0^-$

Par suite $\lim\limits_{x\to-4^+} f_5(x) = -\infty$

Alors f_5 n'a pas une limite finie

Donc f_5 n'est pas prolongeable par continuité en -4.

Exercice 3

1/ • $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv -\dfrac{95\pi}{7} \quad [2\pi]$

$\equiv -\dfrac{(28\times 7-3)\pi}{7} \quad [2\pi]$

$\equiv -28\pi + \dfrac{3\pi}{7} \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{3\pi}{7} \quad [2\pi]$

Comme $\dfrac{3\pi}{7} \in \left]-\pi;\ \pi\right]$ alors $\dfrac{3\pi}{7}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

• $\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)} \equiv \dfrac{138\pi}{7} \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)} \equiv 20\pi - \dfrac{2\pi}{7} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \quad \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)} \equiv -\dfrac{2\pi}{7} \quad [2\pi]$

Comme $\dfrac{-2\pi}{7} \in \left]-\pi;\ \pi\right]$ alors $\dfrac{-2\pi}{7}$ est la mesure principale de $\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)}$.

2/ $\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \pi + \widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \pi - \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} - \dfrac{2\pi}{7} \quad [2\pi]$

$\equiv \pi - \dfrac{3\pi}{7} - \dfrac{2\pi}{7} \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{2\pi}{7} \quad [2\pi]$.

Comme $\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)} \quad [2\pi]$ alors ABC est un triangle isocèle en A

3/ ▸ Désignons par N' le second point de rencontre $\mathcal{C}$ et (AI).

▸ ABC est isocèle en A et $I = B * C$

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)} \equiv \dfrac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \quad [2\pi]$

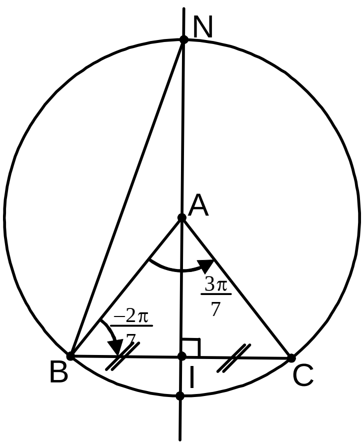
$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)} \equiv \dfrac{3\pi}{14} \quad [2\pi]$.

...... Or $\widehat{\left(\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NN'}\right)} \equiv \dfrac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN'}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{1}{2}\,\dfrac{3\pi}{14} \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{3\pi}{28} \quad [2\pi]$



Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NI}\right)} \equiv \dfrac{3\pi}{28} \quad [2\pi]$ **car** $I \in [NN']$.

D'autre part aussi $E \in \Delta = \text{méd}[BC]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EI}\right)} \equiv \dfrac{3\pi}{28} \quad [2\pi]$

Alors $N = E$.

Exercice 4

1/ ABCD est un losange tel que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ BA = BC et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ ABC est un triangle équilatéral.

2/ • $\overrightarrow{AA}.\overrightarrow{AC} + AB^2 = 0 + a^2 \neq \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad A \notin E.$

• $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + BB^2 = BA.BC.\cos\widehat{ABC} = a.a.\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad B \in E.$

• $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CC} + CB^2 = 0 + a^2 \neq \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad C \notin E.$

• $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} + DB^2 = DA.DC.\cos\widehat{ADC} + DB^2$

$= a.a.\cos\frac{\pi}{3} + DB^2 = \frac{a^2}{2} + DB^2 \neq \frac{a^2}{2}$ car $DB^2 > 0$

$\Rightarrow \quad D \notin E.$

3/ $\forall M \in P$; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right) + MB^2$

$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) + MB^2$ car $I = A * C$

$= MI^2 - IA^2 + MB^2$

4/ $M \in E \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + MB^2 = \frac{a^2}{2}$

$\overset{3/}{\Leftrightarrow} \quad MI^2 + MB^2 - IA^2 = \frac{a^2}{2}.$

$\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JI}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right)^2 - IA^2 = \frac{a^2}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JI}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{JI}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + IA^2$ car $J = B * I$

$\Leftrightarrow \quad MJ^2 + 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JI} + JI^2 + MJ^2 - 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JI} + JI^2 = \frac{a^2}{2} + IA^2$

$\Leftrightarrow \quad 2.MJ^2 = \frac{a^2}{2} + IA^2 - 2.JI^2.$

$\Leftrightarrow \quad MJ^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}IA^2 - JI^2.$

• $I = A * C \quad \Rightarrow \quad AI = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}.$

• $J = B * I \quad \Rightarrow \quad JI = \frac{1}{2}BI = \frac{1}{2}\sqrt{BA^2 - AI^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$

Ainsi $\quad M \in E \quad \Leftrightarrow \quad MJ^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad MJ^2 = \frac{3}{16}a^2$

$\Leftrightarrow \quad MJ = \frac{\sqrt{3}}{4}a$

$\Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{C}_{\left(J;\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)}$ le cercle de centre J et de rayon $r' = \frac{\sqrt{3}}{4}a$